page 422 1/5 - 1992.
E.S.M.E Option C

Université d'Orléans

ÉCOLE SUPÉRIEURE DE L'ÉNERGIE ET DES MATÉRIAUX

CONCOURS 1992

Option : Spéciales C

MATHÉMATIQUES

DURÉE : 4 heures — COEFFICIENT : 4

Le soin apporté à la rédaction seront des éléments importants d'appréciation

PREMIÈRE PARTIE

On note $\mathscr{S} = \mathscr{A}(\mathbb{N}, \mathbb{R})$ l'ensemble des suites réelles indexées par $\mathbb{N}$.

Si u est dans $\mathscr{S}$, on pourra noter indifféremment u_k pour $u(k)$ pour tout k de $\mathbb{N}$, selon l'usage, et $u = (u_k)_{k \in \mathbb{N}}$ abrégé en (u_k).

Soit $\mathscr{L}$ l'ensemble des suites réelles u de $\mathscr{S}$ telles que $\sum_{k \geqslant 0} (u_k)^2$ converge; pour une telle suite u, on notera : $\| u \| = \sqrt{\sum_{k \geqslant 0} (u_k)^2}$.

1. Soient u et v dans $\mathscr{L}$.

   a. Justifier que $u + v$ est dans $\mathscr{L}$. Pour cela, on pourra commencer par justifier que pour tout k de $\mathbb{N}$, on a :

$$| u_k \cdot v_k | \leqslant \frac{u_k^2 + v_k^2}{2}.$$

   b. On considère l'application P de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$\forall \lambda \in \mathbb{R}, \quad P(\lambda) = \sum_{k \geqslant 0} (\lambda \cdot u_k + v_k)^2.$$

   Justifier que P est bien définie sur $\mathbb{R}$, et l'utiliser pour montrer que :

$$\left(\sum_{k \geqslant 0} u_k \cdot v_k \right)^2 \leqslant \left(\sum_{i \geqslant 0} (u_i)^2 \right) \cdot \left(\sum_{j \geqslant 0} (v_j)^2 \right).$$

   Sauriez-vous dire dans quel cas on a l'égalité ?

   c. Prouver que :

$$\| u + v \| \leqslant \| u \| + \| v \|.$$

   Quelle signification donnez-vous à ce résultat ?

Tournez la page S.V.P.

2. Soit u dans $\mathscr{L}$. on lui associe la suite $v = M(u)$ de $\mathscr{S}$. définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ v_n = \frac{1}{n+1}\left(\sum_{k=0}^{n} u_k\right).$$

a. Justifier que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $(v_n)^2 - 2 \cdot u_n \cdot v_n \leqslant n \cdot (v_{n-1})^2 - (n+1) \cdot (v_n)^2$.

b. En déduire que : $\left(\sum_{j=0}^{n} (v_j)^2\right) \leqslant 2 \cdot \left(\sum_{k=0}^{n} u_k \cdot v_k\right)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

c. Conclure que $v = M(u)$ est dans $\mathscr{L}$, et : $\| M(u) \| \leqslant 2 \cdot \| u \|$.

d. Montrer que l'application M de $\mathscr{L}$ dans $\mathscr{L}$ est injective, et non surjective.

e. Soit a un réel fixé de $]-1, 1[$. Calculer $\| u \|$ pour u définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = a^n.$$

Exprimer $\| M(u) \|$ grâce à la série entière : $F(z) = \sum_{n \geqslant 0} \frac{z^{n+1}}{(n+1)^2}$ (on précisera pour quelles valeurs du réel z, $F(z)$ est défini).

f. Soit n fixé dans $\mathbb{N}^*$, et u définie pour tout $k \in \mathbb{N}$, par :

$$u_k = \frac{1}{\sqrt{k+1}} \text{ si } k \in [0, n];\ u_k = 0 \text{ si } k > n.$$

Grâce, par exemple, à des comparaisons avec des intégrales, justifier que si $v = M(u)$:

$$\left(\sum_{j \geqslant 0} (v_j)^2\right) \geqslant 4 \cdot \sum_{i \geqslant 0} (u_i)^2 - 24.$$

À votre avis, quelle conclusion pourrait-on en tirer, concernant le résultat de 2.*c* ?

3. Soient u et v dans $\mathscr{L}$. On leur associe la suite w de $\mathscr{S}$, définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ w_n = \sum_{k=0}^{n} u_k \cdot v_{n-k}.$$

a. Que peut-on dire de la série de terme général $w_n\ (n \in \mathbb{N})$ lorsque les deux séries $\sum_{i \geqslant 0} |u_i|$ et $\sum_{j \geqslant 0} |v_j|$ convergent ?

b. Donner un exemple de suite u, telle que pour $v = u$, w n'est pas dans $\mathscr{L}$.

4. Soit u dans $\mathscr{L}$. On lui associe la série entière G_u définie par :

$$G_u(z) = \sum_{n \geqslant 0} \frac{u_n \cdot z^n}{n!}.$$

a. Quel est son rayon de convergence ?

b. Déterminer G_u lorsque u est la suite définie par :

$$\forall k \in \mathbb{N},\ u_k = \frac{1}{k+1}.$$

page 424 3/5 - 1992.
E S M E Option C

5. Soit u dans $\mathscr{L}$. On lui associe la série entière F_u définie par : $F_u(z) = \sum_{n \geqslant 0} u_n \cdot z^n$.

a. Montrer que pour R, rayon de convergence de F_u, on a $R \geqslant 1$.

b. Soit r dans $[0, R[$. Montrer que pour tout n dans $\mathbb{N}$:

$$\int_0^{2\pi} \left| \sum_{k=0}^{n} u_k \cdot r^k \cdot e^{i \cdot k \cdot \theta} \right|^2 \cdot \frac{d\theta}{2\pi} = \sum_{k=0}^{n} u_k^2 \cdot r^{2 \cdot k}.$$

c. Grâce à une majoration de : $\left| |F_u(r \cdot e^{i\theta})|^2 - \left| \sum_{k=0}^{n} u_k \cdot r^k \cdot e^{i \cdot k \cdot \theta} \right|^2 \right|$ indépendante de θ dans $[0, 2\pi]$,

en utilisant par exemple : $s_n = \left(\sum_{k=0}^{n} |u_k| \cdot r^k \right)$ et $\partial_n = \left(\sum_{k \geqslant n-1} |u_k| \cdot r^k \right)$, montrer avec soin que :

$$\int_0^{2\pi} |F_u(r \cdot e^{i\theta})|^2 \cdot \frac{d\theta}{2\pi} = \sum_{k \geqslant 0} u_k^2 \cdot r^{2 \cdot k}.$$

d. En déduire que lorsque $R > 1$: $\int_0^{2\pi} |F_u(e^{i\theta})|^2 \cdot \frac{d\theta}{2\pi} = \|u\|^2$.

e. Exprimer $\int_0^{\pi} e^{2 \cdot \cos(\theta)} \cdot d\theta$ grâce à la série : $\sum_{k \geqslant 0} \frac{1}{(k!)^2}$.

DEUXIÈME PARTIE

Soit $p = (p_k)_{k \in \mathbb{N}}$ une suite de $\mathscr{S}$ telle que :

(i) $\forall k \in \mathbb{N}, \quad p_k \geqslant 0$;

(ii) La série $\sum_{k \geqslant 0} p_k$ converge et de somme 1.

On note $\mathscr{L}(p)$ l'ensemble des suites réelles u de $\mathscr{S}$ telles que $\sum_{k \geqslant 0} p_k \cdot (u_k)^2$ converge.

1. Comparer les ensembles $\mathscr{L}$ et $\mathscr{L}(p)$.

2. Justifier que si u et v sont dans $\mathscr{L}(p)$, alors $\sum_{k \geqslant 0} p_k \cdot u_k \cdot v_k$ converge.

3. Soit a un réel fixé. Étudier si la suite u définie, pour tout $n \in \mathbb{N}$, par : $u_n = a^n$, est dans $\mathscr{L}(p)$, dans chacun des deux cas suivants :

(i) $\forall k \in \mathbb{N}, \ p_k = \frac{1}{e \cdot k!}$; (ii) $\forall k \in \mathbb{N}, \ p_k = \frac{1}{2^{k+1}}$.

Tournez la page S.V.P.

TROISIÈME PARTIE

On note ici $\mathscr{C}$ l'ensemble des applications continues de $[0, +\infty[$ vers $\mathbb{R}$, et $\mathscr{P}$ l'ensemble des applications polynomiales de $[0, +\infty[$ vers $\mathbb{R}$, on pourra aussi noter et identifier $\mathscr{P} = \mathbb{R}[X]$.

Soit φ dans $\mathscr{C}$, telle que :

(i) $\forall x \in [0, +\infty[, \quad \varphi(x) \geqslant 0$;

(ii) L'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \varphi(x) \cdot dx$ existe et vaut 1.

On note $\mathscr{L}\mathscr{C}(\varphi)$ l'ensemble des applications f de $\mathscr{C}$ telles que $\displaystyle\int_0^{+\infty} (f(x))^2 \cdot \varphi(x) \cdot dx$ converge.

1. Justifier que si f et g sont dans $\mathscr{L}\mathscr{C}(\varphi)$, alors $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(x) \cdot g(x) \cdot \varphi(x) \cdot dx$ converge. Dans la suite on pourra noter $< f, g >$ la valeur de cette intégrale.

2. Étudier dans chacun des quatre cas suivants si $\mathscr{L}\mathscr{C}(\varphi)$ contient $\mathscr{P}$:

   (i) $\varphi(x) = 6 \cdot x \cdot (1 - x)$ si $x \in [0, 1]$; $\varphi(x) = 0$ si $x \in]1, +\infty[$.

   (ii) $\varphi(x) = e^{-x}$ pour tout $x \in [0, +\infty[$.

   (iii) $\varphi(x) = 2 \cdot e^{-\pi \cdot x^2}$ pour tout $x \in [0, +\infty[$.

   (iv) $\varphi(x) = \dfrac{2}{\pi(1 + x^2)}$ pour tout $x \in [0, +\infty[$.

3. On suppose ici que φ est telle que $\mathscr{L}\mathscr{C}(\varphi)$ contient $\mathscr{P}$.

   a. Justifier l'existence et l'unicité d'une famille $(B_k)_{k \in \mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathscr{P}$ telle que :

   (i) Pour chaque $k \in \mathbb{N}$, B_k est de degré k et a son coefficient dominant > 0 ;

   (ii) Pour tous k et h de $\mathbb{N}$, $\displaystyle\int_0^{+\infty} B_k(x) \cdot B_h(x) \cdot \varphi(x) \cdot dx$ vaut 0 pour $k \neq h$ et vaut 1 lorsque $k = h$.

   Pour cela on pourra remarquer que si $B_0, \ldots, B_p$ ont déjà été déterminés, on recherchera :

   $$B_{p+1}(X) = \lambda \cdot X^{p+1} + \sum_{k=0}^{p} \alpha_k \cdot B_k(X)$$

   en déterminant de façon unique les réels $\lambda, \alpha_0, \ldots, \alpha_p$.

   b. Déterminer B_0, B_1 dans les cas de la question précédente où $\mathscr{L}\mathscr{C}(\varphi)$ contient $\mathscr{P}$.

   c. À chaque f dans $\mathscr{L}\mathscr{C}(\varphi)$ on associe la suite u de $\mathscr{S}$ définie par :

   $$\text{pour chaque } k \in \mathbb{N}, \; u_k = \int_0^{+\infty} B_k(x) \cdot f(x) \cdot \varphi(x) \cdot dx.$$

   Justifier que u est $\mathscr{L}$, et majorer $\| u \|$.

   (On pourra poser : $P_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k \cdot B_k$ et considérer $\displaystyle\int_0^{+\infty} (f(x) - P_n(x))^2 \cdot \varphi(x) \cdot dx$.)

4. Soit Y une variable aléatoire réelle de densité ψ, avec :

$$\psi(x) = 0 \quad \text{si} \quad x \in]-\infty, 0[; \qquad \psi(x) = e^{-x} \quad \text{si} \quad x \in [0, +\infty[.$$

Justifier l'existence et calculer $\min \{ E((Y^2 - a\cdot Y - b)^2) / a, b \in \mathbb{R} \}$.

(*N.B.* : $E((Y^2 - a\cdot Y - b)^2)$ désigne l'espérance de la v.a.r. $(Y^2 - a\cdot Y - b)^2$.)

Pour cela, il pourra être utile de considérer B_0, B_1 et B_2 du cas (ii) de III.2.

QUATRIÈME PARTIE

On note ici $\mathcal{E}$ l'ensemble des applications f continues de $[0, +\infty[$ vers $\mathbb{R}$, telles que $\int_0^{+\infty} (f(x))^2 \cdot dx$ converge.

1. Montrer que $\mathcal{E}$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.

2. Pour f dans $\mathcal{E}$, on lui associe $g = H(f)$ définie par :

$$g(0) = f(0) ; \quad g(x) = \frac{1}{x} \int_0^x f(t)\cdot dt \quad \text{si} \quad x > 0.$$

a. Justifier que g est une application continue de $[0, +\infty[$ vers $\mathbb{R}$.

b. Justifier que H est une application linéaire de $\mathcal{E}$ vers $\mathcal{C}$, et étudier si H est injective, surjective, bijective.

3. Soit f dans $\mathcal{E}$, et $g = H(f)$.

a. Soient ε et A deux réels tels que : $0 < \varepsilon < A$.

Grâce à une intégration par parties, justifier que :

$$\int_\varepsilon^A (g(x))^2 \cdot dx \leqslant \varepsilon\cdot(g(\varepsilon))^2 + 2\cdot \left| \int_\varepsilon^A g(t)\cdot f(t)\cdot dt \right| .$$

b. En déduire que g est dans $\mathcal{E}$ et que :

$$\int_0^{+\infty} (g(x))^2 \cdot dx \leqslant 4\cdot \int_0^{+\infty} (f(x))^2 \cdot dx.$$

4. H étant donc un endormorphisme de $\mathcal{E}$, étudier ses valeurs propres et vecteurs propres : c'est-à-dire que l'on cherchera s'il peut exister λ dans $\mathbb{R}$, et f dans $\mathcal{E}$ non nulle, tels que : $H(f) = \lambda\cdot f$; on formera une équation différentielle dont f est solution afin de conclure.

5.*a.* Soit n dans $\mathbb{N}^*$, et f_n l'application définie par :

$$f_n(x) = 0 \quad \text{si} \quad x \in \left[0, \frac{n-1}{n}\right] ; \qquad f_n(x) = n\cdot(x-1) + 1 \quad \text{si} \quad x \in \left[\frac{n-1}{n}, 1\right] ;$$

$$f_n(x) = x^{-\frac{n+1}{2\cdot n}} \quad \text{si} \quad x \in [1, +\infty[.$$

Montrer que f_n est dans $\mathcal{E}$ et calculer : $\int_0^{+\infty} (f_n(t))^2 \cdot dt$.

b. Préciser $H(f_n)$ et calculer $\int_1^{+\infty} (H(f_n)(x))^2 \cdot dx$ pour $n \geqslant 2$.

6. Quelle est la valeur de : $\text{Sup} \left\{ \dfrac{\int_0^{+\infty} (H(f)(x))^2 \cdot dx}{\int_0^{+\infty} (f(t))^2 \cdot dt} \Big/ f \in \mathcal{E}, f \neq 0 \right\}$ et cette borne supérieure est-elle un maximum ?